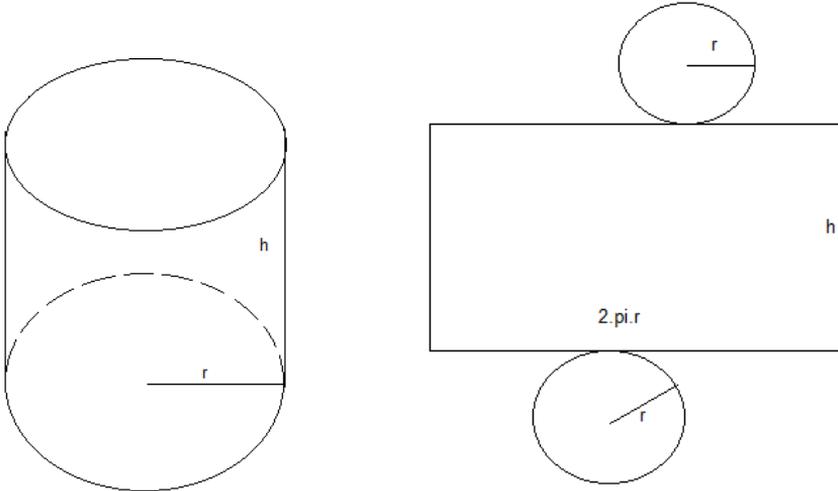


Opción A

Junio 2011 común ejercicio 1 opción A

[2'5 puntos] Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m^2 . Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

Solución



Función a maximizar Volumen = $V = (\text{área base}) \cdot \text{altura} = (\pi r^2) \cdot h$

Relación entre las variables área total = $54 = (2\pi r) \cdot h + 2 \cdot (\pi r^2)$, de donde $h = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r}$ y

simplificando nos queda $h = \frac{27}{\pi r} - r$.

Función a maximizar $V(r) = (\pi r^2) \cdot h = (\pi r^2) \cdot [\frac{27}{\pi r} - r] = 27r - \pi r^3$.

Si $V'(b) = 0$ y $V''(b) < 0$, $x = b$ es un máximo de $V(r)$

$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$. De $V'(r) = 0$, tenemos $27 - 3\pi r^2 = 0$, es decir $r^2 = 9/\pi$, de donde $x = \pm\sqrt{9/\pi}$, y como "r" es una longitud tenemos $r = 3/\sqrt{\pi}$ m.

Las dimensiones del depósito son $r = 3/\sqrt{\pi}$ m y $h = \frac{27}{\pi r} - r = \frac{27}{\pi \cdot 3/\sqrt{\pi}} - 3/\sqrt{\pi} = 6/\sqrt{\pi}$ m, lo cual es cierto pues la altura tiene que ser igual al diámetro.

Veamos que $r = 3/\sqrt{\pi}$ es un máximo, viendo que $V''(3/\sqrt{\pi}) < 0$

$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$.

$V''(r) = -6\pi r$.

Sustituyendo " $3/\sqrt{\pi}$ " por "r" en $V''(r)$ obtenemos $V''(3/\sqrt{\pi}) = -18\sqrt{\pi} < 0$, luego es un máximo.

Junio 2011 común ejercicio 2 opción A

Sea $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = \ln(x + 1)$, donde \ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , el eje OY y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.

(b) [1'75 puntos] Halla el área del recinto anterior.

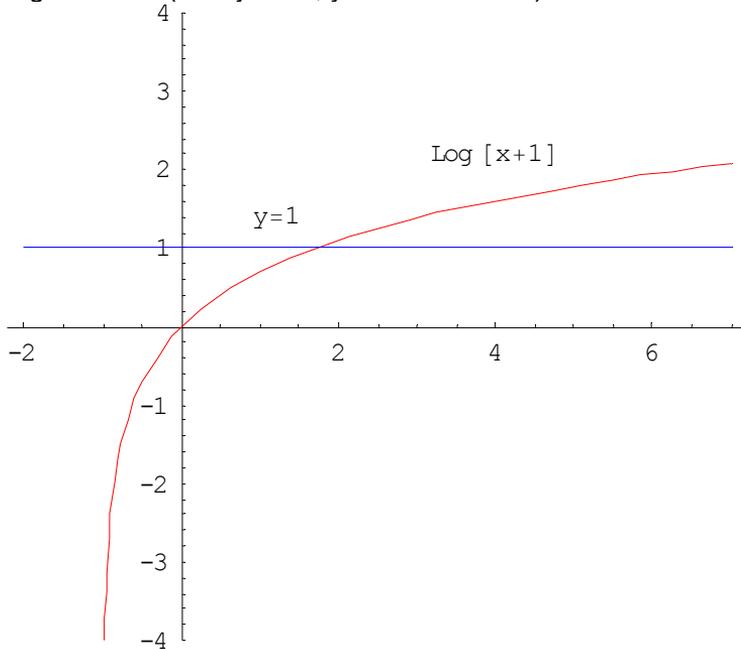
Solución

Sabemos que la gráfica de $\ln(x + 1)$ es exactamente igual que la de $\ln(x)$, pero desplazada una unidad a la izquierda en el eje OX, es decir tiene una asíntota vertical en $x = -1$ ($\ln(x)$ la tiene en $x = 0$), siempre es creciente, y corta al eje OX en el punto de abscisa $x = 0$, ($\ln(x)$ corta al eje OX en $x = 1$).

El corte de f con OY se obtiene igualando a cero la función, es decir $\ln(x + 1) = 0$, pero recordamos que $\ln(1) = 0$, por $x + 1 = 1$, de donde $x = 0$, y $f(0) = \ln(1) = 0$.

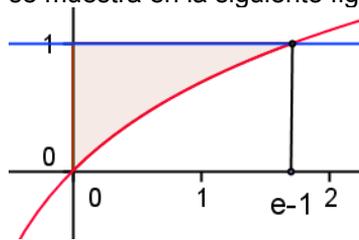
El corte de f con la recta $y = 1$, se obtiene resolviendo $\ln(x + 1) = 1$, pero recordamos que $\ln(e) = 1$, de donde $x + 1 = e$, y tenemos que se cortan en la abscisa $x = e - 1$.

Un esbozo de las gráficas es (en rojo el ln, y en azul la recta)



(b)

El área que me piden, es la que se muestra en la siguiente figura



Área = (área rectángulo) – (área bajo $\ln(x+1)$ entre 0 y $e-1$) =

$$= (e-1) \cdot 1 - \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx = (e-1) \cdot 1 - [x \cdot \ln(x+1) - x + \ln|x+1|]_0^{e-1} =$$

$$= (e-1) - ((e-1) \cdot \ln(e) - (e-1) + \ln(e)) - (0 - 0 + 0) = (e-1) - ((e-1) - (e-1) + 1) =$$

$$= (e-1) - 1 = (e-2) u^2.$$

** $\int \ln(x+2) \cdot dx$, que es una integral por partes ($\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$)

Tomamos $u = \ln(x+1)$ de donde $du = dx/(x+1)$, y $dv = dx$ de donde $v = \int dx = x$, luego nos resulta

$$\int \ln(x+1) \cdot dx = x \cdot \ln(x+1) - \int [x/(x+1)] dx = x \cdot \ln(x+1) - \int [(x+1-1)/(x+1)] dx = x \cdot \ln(x+1) - \int [1 - 1/(x+1)] dx$$

$$= x \cdot \ln(x+1) - x + \ln|x+1| + K.$$

Junio 2011 común ejercicio 3 opción A

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$-\lambda x + y + z = 1$$

$$x + \lambda y + z = 2$$

$$\lambda x + y + z = 1$$

(a) [1'75 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .

(b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

Solución

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1\lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1\lambda & 1 & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1\lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-\lambda)(\lambda-1) - (1)(1-\lambda) + (1)(1-\lambda^2) = (-\lambda)(\lambda-1) + (1)(\lambda-1) + (1)(1+\lambda) \cdot (1-\lambda) =$$

$$= (\lambda-1)(-\lambda+1-1-\lambda) = (\lambda-1)(-2\lambda)$$

(Lo he desarrollado por los adjuntos de la 1ª fila)

Resolvemos $|A| = 0$, es decir $(\lambda-1)(-2\lambda) = 0$, de donde $\lambda = 1$ y $\lambda = 0$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 0$, tenemos $|A| \neq 0$ con lo cual $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$, y por el teorema de Rouché el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$\text{Si } \lambda = 1, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

$$\text{En } A^* \text{ como } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(4-6) = 2 \neq 0, \text{ tenemos } \text{rango}(A^*) = 3$$

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, por el teorema de Rouché el sistema es incompatible, y no tiene solución.

$$\text{Si } \lambda = 0, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

$$\text{En } A^* \text{ como } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1-1) = 0, \text{ tenemos } \text{rango}(A^*) = 2$$

Como $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) < n^\circ$ de incógnitas, por el teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

(b)

Nos piden resolverlo si $\lambda = 0$.

Hemos visto que como $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*)$, por el teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ$ de incógnitas, tenemos sólo dos ecuaciones (las dos primeras, con las que hemos calculado el rango de A, y dos incógnitas principales).

$$y + z = 1$$

$$x + z = 2. \text{ Tomamos } z = \lambda \text{ n}^\circ \text{ real, y obtenemos } x = 2 - \lambda \text{ e } y = 1 - \lambda.$$

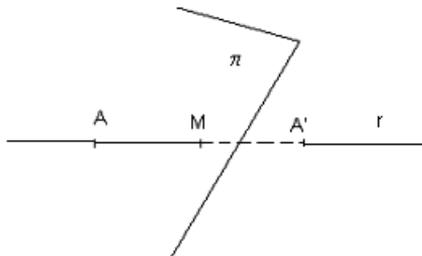
La solución del sistema es $(x, y, z) = (2 - \lambda, 1 - \lambda, \lambda)$ con λ n° real.

Junio 2011 común ejercicio 4 opción A

[2'5 puntos] Determina el punto simétrico del punto $A(-3,1,6)$ respecto de la recta $x - 1 = (y + 3)/2 = (z + 1)/2$.

Solución

Simétrico de $A(-3,1,6)$ respecto a la recta $x - 1 = (y + 3)/2 = (z + 1)/2$



Calculamos el punto M proyección ortogonal del punto A sobre la recta r. M es el punto medio del segmento AA' , siendo A' el punto simétrico buscado

(1)

Determinamos el plano π que pasa por $A(-3,1,6)$ y es perpendicular a la recta "r" por tanto su vector normal \mathbf{n} es el vector director de la recta \mathbf{v} , es decir $\mathbf{n} = \mathbf{v} = (1,2,2)$

La determinación normal del plano es $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0 = 1(x+3) + 2(y-1) + (2)(z-6)$.

Operando nos queda $\pi \equiv x + 2y + 2z - 11 = 0$

(2)

Calculamos el punto M intersección de la recta r con el plano π , sustituyendo la ecuación de la recta en el plano.

$r \equiv (x,y,z) = (1 + \lambda, -3 + 2\lambda, -1 + 2\lambda)$, pues un punto de la recta es $(1, -3, -1)$

$1(1 + \lambda) + 2(-3 + 2\lambda) + 2(-1 + 2\lambda) - 11 = 0$. Operando sale $9\lambda - 18 = 0$, de donde $\lambda = 2$, y tenemos $M(1 + 2, -3 + 2(2), -1 + 2(2)) = M(3, 1, 3)$

(3)

El punto M es el punto medio de AA'

$(3, 1, 3) = ((-3+x)/2, (1+y)/2, (6+z)/2)$

De $3 = (-3+x)/2$, obtenemos $x = 9$

De $1 = (1+y)/2$, obtenemos $y = 1$

De $3 = (6+z)/2$, obtenemos $z = 0$

Luego el simétrico es $A'(9, 1, 0)$

Opción B

Junio 2011 común ejercicio 1 opción B

[2'5 puntos] Sea $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = \sqrt{x-1}$. Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2,0)$. ¿Cuál es la distancia?

Solución

Tenemos que hacer mínima la distancia del punto $A(2,0)$ al punto $X(x, \sqrt{x-1})$.

$d(A,X) = d(x) = \|\mathbf{AX}\| = +\sqrt{[(x-2)^2 + (\sqrt{x-1})^2]} = +\sqrt{(x-2)^2 + (x-1)}$

Si $d'(x) = 0$ y $d''(x) > 0$, $x = b$ es un mínimo de $d(x)$

$d'(x) = (2(x-2)+1) / (2 \cdot \sqrt{(x-2)^2 + (x-1)}) = (2x-3) / (2 \cdot \sqrt{(x-2)^2 + (x-1)})$

De $d'(x) = 0$, tenemos $2x-3 = 0$, de donde $x = 3/2$. (Posible mínimo)

El punto pedido sería $X(3/2, \sqrt{(3/2)-1}) = X(3/2, \sqrt{1/2})$, y por tanto la distancia es

$d(x) = \|\mathbf{AX}\| = +\sqrt{[(3/2-2)^2 + (3/2-1)]} = +\sqrt{1/4 + 1/2} = +\sqrt{3/4}$ u.l.

Veamos que es un mínimo, es decir $d''(3/2) > 0$

$d'(x) = (2x-3) / (2 \cdot \sqrt{(x-2)^2 + (x-1)})$

$d''(x) = ([4 \cdot \sqrt{(x-2)^2 + (x-1)}] - (2x-3) \cdot \{2 \cdot (2x-3) / 4 \cdot \sqrt{(x-2)^2 + (x-1)}\}) / (4 \cdot [(x-2)^2 + (x-1)]^2)$

$d''(3/2) = ([4 \cdot \sqrt{3/4}] - 0) / (4 \cdot (3/4)) > 0$, luego es un mínimo.

Junio 2011 común ejercicio 2 opción B

[2'5 puntos] Halla $\int \frac{e^x}{(e^{2x} - 1)(e^x + 1)} dx$

Sugerencia: efectúa el cambio $t = e^x$.

Solución

(a)

Del cambio $t = e^x$, tenemos $dt = e^x \cdot dx$.

Entramos ya en la integral

$I = \int e^x / [(e^{2x} - 1)(e^x + 1)] dx = \{\text{cambio } t = e^x, \text{ tenemos } dt = e^x \cdot dx\} = \int dt / [(t^2 - 1)(t + 1)] = \int dt / [(t - 1)(t + 1)(t + 1)] = \int dt / [(t - 1)(t + 1)^2]$, que es una integral racional con raíces reales, una simple el "-1" y otra doble, el "1".

$I = \int dt / [(t - 1)(t + 1)^2] = \int A \cdot dt / (t - 1) + \int B \cdot dt / (t + 1) + \int C \cdot dt / (t + 1)^2 =$
 $= A \cdot \ln|t - 1| + B \cdot \ln|t + 1| + C \cdot (t + 1)^{-2+1} / (-2+1) + K = A \cdot \ln|t - 1| + B \cdot \ln|t + 1| - C / (t + 1) + K =$
 $\{\text{quito cambio } t = e^x\} = A \cdot \ln|e^x - 1| + B \cdot \ln|e^x + 1| - C / (e^x + 1) + K$, donde A, B y C son constantes que vamos a calcular a continuación:

$$1 = A/(t - 1) + B/(t + 1) + C/(t + 1)^2 = [A(t+1)^2 + B(t+1)(t-1) + C(t-1)] / (t-1)(t+1)^2.$$

Igualando numeradores tenemos $1 = A(t+1)^2 + B(t+1)(t-1) + C(t-1)$

Para $t = 1$, tenemos $1 = 4A$, de donde $A = 1/4$

Para $t = -1$, tenemos $1 = -2C$, de donde $C = -1/2$.

Para $t = 0$, tenemos $1 = 1/4 + B(-1) + (-1/2)/(-1) = -B + 3/4$, de donde $B = 3/4 - 1 = -1/4$.

La integral pedida es $I = A \cdot \ln|e^x - 1| + B \cdot \ln|e^x + 1| - C / (e^x + 1) + K =$

$$= (1/4) \cdot \ln|e^x - 1| - (1/4) \cdot \ln|e^x + 1| + 1/(2 \cdot (e^x + 1)) + K$$

Junio 2011 común ejercicio 3 opción B

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) [1'25 puntos] Determina los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.

(b) [1'25 puntos] Para $\lambda = 0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+1)^2 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 3\lambda+3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = A^2 + 3A = \begin{pmatrix} (\lambda+1)^2 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda+3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+1)^2 + (3\lambda+3) & 0 \\ \lambda+3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 5\lambda + 4 & 0 \\ \lambda+3 & -2 \end{pmatrix}$$

Para que B no tenga inversa B^{-1} , su determinante $(|B|)$ tiene que ser cero.

$$|B| = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 5\lambda + 4 & 0 \\ \lambda + 3 & -2 \end{vmatrix} = -2(4\lambda^2 + 5\lambda + 4) - 0 = 0, \text{ es decir } \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0. \text{ Resolviendo esta ecuación}$$

de 2º grado tenemos $\lambda = -1$ y $\lambda = -4$.

B no tenga inversa B^{-1} , si $\lambda = -1$ y $\lambda = -4$.

(b)

Para $\lambda = 0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$

Para $\lambda = 0$, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Como $\det(A) = |A| = -1 \neq 0$, existe la matriz inversa de A que

es $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$.

De la expresión $AX + A = 2I$, tenemos $AX = 2I - A$. Multiplicando esta expresión por la izquierda por A^{-1} tenemos $A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot (2I - A)$, es decir $X = A^{-1} \cdot (2I - A)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t) = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2I - A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto } X = A^{-1} \cdot (2I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Junio 2011 común ejercicio 4 opción B

Considera los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,1,0)$, y la recta "r" dada por $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$.

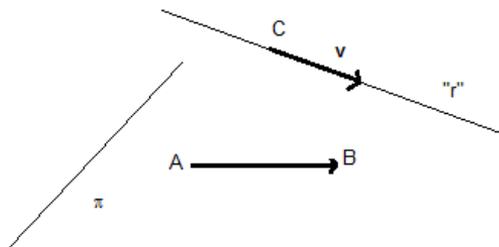
(a) [1'75 puntos] Determina la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y B.

(b) [0'75 puntos] Determina si la recta que pasa por los puntos $P(1,2,1)$ y $Q(3,4,1)$ está contenido en dicho plano.

Solución

(a)

Un plano π está determinado por un punto, el A y dos vectores independientes, el \mathbf{AB} y el vector director de la recta \mathbf{v} (puesto que el plano es paralelo a la recta).



Ponemos la recta "r" en paramétricas haciendo $x = \lambda$ n° real, con lo cual

$$x = \lambda$$

$$y = 1 - \lambda$$

$$z = 2 - \lambda, \text{ de donde un punto de la recta es el } C(0,1,2) \text{ y un vector director } \mathbf{v} = (1,-1,-1)$$

El plano π tiene de ecuación $0 = \det(\pi \mathbf{AX}, \mathbf{AB}, \mathbf{v})$

$$A(1,0,-1); B(2,1,0), \mathbf{AB} = (1,1,1), \mathbf{v} = (1,-1,-1)$$

$$0 = \det(\pi \mathbf{AX}, \mathbf{AB}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = (x-1)(0) - y(-2) + (z+1)(-2) = 2y - 2z - 2 = 0, \text{ o bien} \\ \text{fila} \end{array}$$

simplificando π tiene de ecuación $y - z - 1 = 0$

(b)

Para ver si la recta que pasa por los puntos $P(1,2,1)$ y $Q(3,4,1)$ está contenido en dicho plano, sólo tenemos que ver si los puntos P y Q pertenecen al plano.

Entrando con P en π tenemos $(2) - (1) - 1 = 0$, lo cual es cierto

Entrando con Q en π tenemos $(4) - (1) - 1 = 2 \neq 0$, lo cual es falso, por tanto la recta no está contenida en el plano.